## E1 Calculs simples d'intégrales à l'aide de primitives.

A $\int_1^4 (t+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}})\,dt=\frac{1}{4}$.

B $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{2}{5}$.

C $\int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}}\,du=2(\sqrt{11}-\sqrt{3})$.

D $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx=-\frac{1}{3}$.

E $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\frac{\pi}{4})\,dx=0$.

## E2 Les classiques à ne pas manquer !

A $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

B $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx=2$.

C $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D Pour tout $x$ de $\mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ donc

$\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx=-\frac{7}{4}+\ln 2$.

E Une primitive sur $]0;+\infty[$ de $f: x\to\ln x$ est $F: x\to x\ln x-x$.

## E3 Calculs simples utilisant les propriétés de l'intégrale.

A $\int_0^1 (\ln(1+x)+3)\,dx+\int_0^1 \ln\frac{1}{1+x}\,dx=3$.

B $\int_1^3 e^{1+x^2}dx+\int_3^1 e^{1+x^2}dx=0$.

C $\int_0^2 |x-1|\,dx=21$.

D $\int_{-4}^{-1} x^3e^x \geq 0$.

E $\int_0^1 x^2e^x\,dx \geq \int_0^1 xe^x dx$.

**E4**

Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$ et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ où a et b sont des réels.

A $f$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;+1[$ et $]+1;+\infty[$.

B Pour tout $x$ de $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$,

donc $f=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-v'}{v^2}\right]$ où $v: x\to x^2-1$.

C $f$ admet des primitives sur $[0;2]$.

D $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ existe et une primitive de $f$ sur $[2;3]$ est F telle que $F(x)=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{x^2-1}$.

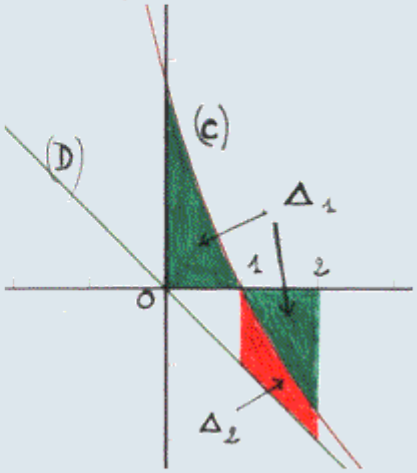
E $I=\dfrac{5}{48}$.

**E5**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal la courbe (C) représente la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+e^{-x+1}$.

On note $A(\Delta_1)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

On note $A(\Delta_2)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $1\le x\le 2$ et $-x\le y\le f(x)$.




A $A(\Delta_1)=\int_0^2 f(x)\,dx$ unités d'aire (u.a).

B Si, pour tout réel $\alpha$, on note $I(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)\,dx$, alors on a :

$$I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}-e^{-\alpha+1}+e.$$

C $A(\Delta_1)=-I(0)-I(2)$ u.a.

D $A(\Delta_2)=\int_1^2 -e^{-x+1}\,dx$ u.a.

E $A(\Delta_1)=e-1+\dfrac{1}{e}$ u.a et $A(\Delta_2)=1-\dfrac{1}{e}$ u.a.

**E6** Soit $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ et l'intégrale $I(a)=\int_1^a f(x)\,dx$, où $a$ est un réel strictement positif.

A Pour $x>0$, $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

B Une primitive de $g: x\mapsto\dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction G telle que $G(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$.

C A l'aide d'une intégration par parties et des résultats précédents on trouve : $I(a) = 2\ln 2 - \dfrac{\ln(1+a)}{a} + \ln\dfrac{a}{a+1}$.

D $\lim\limits_{a\to 0} I(a)=2\ln 2-1$

E $\ln(1+a)=\ln[a(1+\dfrac{1}{a})]=\ln a+\ln(1+\dfrac{1}{a})$. On en déduit $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)=+\infty$.

**E7** Soit les intégrales $I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$, $J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$ et $K=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$.

A A l'aide de deux intégrations par parties successives on obtient : $K=\dfrac{e^{\pi}-1}{4}-\dfrac{K}{4}$ puis $K=\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$.

B $I+J=e^{\pi}$.

C En utilisant la relation $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ on trouve que $I=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x dx + \dfrac{1}{2}K$ soit $I=\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)$.

D $J=\dfrac{2e^{\pi}+3}{5}$.

E $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ donc $I-J=K$. On retrouve ainsi la valeur de $K$ obtenue au A.

**E8** Soit la fonction F définie sur $I=]0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \dfrac{e^t}{t}\,dt$.

A F est la primitive de $f$ sur I telle que $F(1)=2$.

B F est décroissante sur I.

C Pour tout $x$ de I, $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ donc $F(x)-\ln x=\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$

D Pour $x>0$, le signe de $F(x)-\ln x$ est résumé ci-dessous :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)-\ln x$ | ‖ | + | 0 | + | |

E Le tableau des variations de F est le suivant :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | ‖ | + | |
| $F(x)$ | ‖ | ↗ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | |

## E9

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Pour tout réel strictement positif $\alpha$ on pose :

$I(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx$, $J(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ et $K(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

A $I(\alpha)$ est un réel positif.

B $J(\alpha)=\alpha+\ln\frac{1+e^\alpha}{2}$.

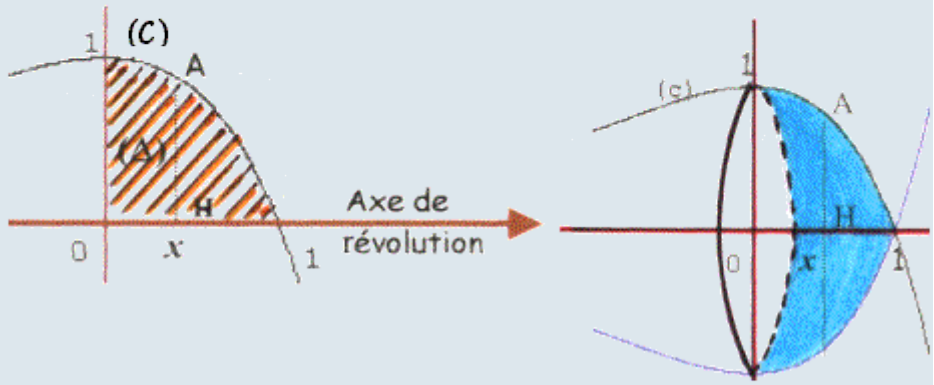
C $K(\alpha)=\int_0^\alpha\left(1-\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}\right)dx$.

D Pour tout réel $x$, $f(x)+f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

E De la relation précédente on déduit par intégration :
$I(\alpha)=K(\alpha)-f(\alpha)+\ln 2$.

E10

Soit $(C)$ la portion de courbe représentant sur $[0,1]$ la fonction $f$ définie par $f(x)=(1-x)e^x$, et soit $(\Delta)$ le domaine plan limité par $(C)$ et les axes de coordonnées.
On veut déterminer le volume V du solide engendré par la rotation de $(\Delta)$ autour de $(Ox)$.




| | |
|---|---|
| A | L'intersection du solide et du plan d'abscisse $x$, perpendiculaire à l'axe de révolution, est un disque de rayon $AH=(1-x)e^x$. |
| B | En unités de volume, $\frac{V}{\pi}=\int_0^1(1-x)^2e^{2x}dx$. |
| C | Si on pose $J=\int_0^1(1-x)e^{2x}dx$ alors $\frac{V}{\pi}=-\frac{1}{4}+J$. |
| D | $J=\frac{e^3+3}{4}$. |
| E | $V=\frac{\pi(e^2-5)}{4}$ unités de volume. |